

شبیه سازی جریان بر روی سرریز اوجی با استفاده از روش های هیدرودینامیک ذرات هموار و حجم محدود

حامد تقی زاده^۱، حیدر داودیان^۲، مجتبی فرهادزاده^۳، عباس نقوی^{۴*}

۱- دانشجوی دکتری سازه های هیدرولیکی، شرکت مهندسی مشاور تراز آب جامع

۲- معاون طرح و توسعه، شرکت سهامی آب منطقه ای مازندران

۳- مدیر فنی آب، شرکت سهامی آب منطقه ای مازندران

۴- کارشناس ارشد سازه های هیدرولیکی، شرکت مهندسی مشاور تراز آب جامع

خلاصه

یکی از سازه های مهمی که در سدها احداث می شود و امکان خروج سیلاب های اضافه بر ظرفیت سد را میسر می سازد، سرریز نام دارد. نقش مهم دیگر سرریزها، کنترل ارتفاع و حجم آب دریاچه پشت سد است. سرریزهای اوجی از جمله مشهورترین و پرکاربردترین نوع سرریزها می باشد که توانایی آبگذری مناسبی را دارند. در این تحقیق با توجه ویژه بر الگوی جریان عبوری از روی سرریز اوجی به عنوان یکی از اجزای بسیار مهم بندهای انحرافی و سرریز سدها، به شبیه سازی جریان با استفاده از روش های حجم محدود (FVM) و هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) پرداخته شده است. نتایج تحقیق حاکی از این است که روش های FVM و SPH هر دو در برآورد پروفیل سطح آب دارای دقت بسیار مناسبی می باشند. از طرفی روش FVM به دلیل رویکرد مبتنی بر شبکه بندی در برآورد پارامتر فشار دچار خطا و نوسانات بیشتر نسبت به روش SPH شده است. در حالت کلی می توان بیان کرد که مدل SPH در مدل سازی جریان های سطح آزاد و برآورد پارامترهای هیدرولیکی بر روی سرریز اوجی دارای عملکرد مناسبی بوده است.

کلمات کلیدی: سرریز اوجی، شبیه سازی عددی، روش حجم محدود، روش هیدرودینامیک ذرات هموار

۱. مقدمه

یکی از سازه های مهمی که هم زمان با ساخت سدها مورد نیاز واقع می شود و امکان خروج سیلاب های اضافه بر ظرفیت سد را میسر می سازد، سرریز نام دارد. از دیگر کاربردهای مهم سرریزها، کنترل ارتفاع و حجم آب دریاچه پشت سد است که در این حالت شکل و ابعاد سرریز تابعی از موقعیت جغرافیایی و هیدرولوژیکی منطقه خواهد بود. در طراحی این گونه سرریزها چه به منظور منحرف نمودن آب و چه به جهت ذخیره آب ساخته شوند، می بایست دقت کافی مبذول داشت و هرگونه احتمال خطرهای جانبی را مدنظر قرار داد. از انواع سرریزها می توان سرریز سیفونی، سرریز نیلوفری، سرریز جانبی، سرریز

کنگره‌ای، سرریز پلکانی، سرریز لبه آبریز (Ogee spillway) و ... را نام برد. سرریزهای لبه آبریز از جمله مشهورترین و پرکاربردترین و در عین حال ارزان‌ترین نوع سرریزها می‌باشد که توان آگذری مناسبی را دارند.

مطالعات گسترده‌ای در ارتباط با هیدرولیک سرریزهای اوجی انجام گرفته است. اما این تحقیقات بیشتر بر روی مدل‌های فیزیکی صورت گرفته است. استفاده از مدل عددی در جریان‌های عبوری از سرریزها، اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط کسیدی برای تعیین فشار روی تاج سرریز بر اساس فرضیه جریان پتانسیل به صورت دوبعدی صورت گرفت. نتایج این تحقیق از همخوانی مناسبی با نتایج آزمایشگاهی برخوردار می‌باشد و تأثیر لزجت در تعیین سطح آزاد را ناچیز می‌داند [۱]. لی و همکاران در سال ۱۹۸۹ از انفصال میدان جریان به روش المان محدود و حل دوبعدی جریان به صورت جریان پتانسیل نتایج مناسبی از انحنای سطح آب در تحلیل جریان به دست [۲]. اولسن و جلسوی در سال ۱۹۸۹، با استفاده از معادلات رینولدز میانگین زمانی و معادلات k-ε استاندارد به روش حجم محدود جریان عبوری از روی سرریز را به صورت دوبعدی و سه بعدی تحلیل نمودند. نتیجه این تحقیق از اثر ناچیز الگوی پخش در تعیین ضریب دبی سرریز دلالت دارد [۳]. چن و همکاران در سال ۲۰۰۲، به روش حجم محدود جریان آشفته عبوری از روی سرریز پلکانی را مدل نمودند. در این تحقیق آشفتگی جریان را با مدل k-ε و سطح آزاد را با روش حجم سیال تعیین کردند [۴]. یوهانسون و سویچ در سال ۲۰۰۶، دو مدل فیزیکی و عددی را برای جریان روی سرریز در زمان وجود پایاب مقایسه کردند. در مدل عددی از نرم افزار Flow-3D استفاده گردید. نتایج بدست آمده از تحلیل عددی توسط نرم افزار Flow-3D با روش حجم محدود با نتایج مدل فیزیکی آزمایشگاهی انطباق خوبی داشته است. در این نرم افزار پروفیل سطح آب به کمک روش حجم سیال تعیین می‌شود که با مدل فیزیکی تطبیق مناسبی دارد [۵]. در زمینه توسعه مدل‌های عددی نیز تاکنون تلاش‌های فراوانی صورت گرفته است. SPH جزو روش‌هایی است اخیراً در مدل‌سازی و بررسی شرایط هیدرولیکی جریان مورد استفاده قرار گرفته است. این روش اولین بار توسط موناکان در سال ۱۹۷۷ ارائه شد [۶]. ولی‌زاده و همکاران در سال ۲۰۱۱، به شبیه‌سازی جریان با سطح آزاد توسط روش هیدرودینامیک ذرات هموار پرداختند. آنها در این مقاله مدل‌سازی شکست سد، جریان بین دو صفحه موازی و جریان گودال برشی را با استفاده از این روش انجام دادند و از مقایسه نتایج با مطالعات پیشین، صحت عملکرد روش SPH را نشان دادند [۷]. سارهانگ در سال ۲۰۱۳ با استفاده از روش SPH به مدل‌سازی تغییرات فشار بر روی سرریز پلکانی پرداخته است. در این مقاله برای صحت‌سنجی کد مورد استفاده، ابتدا جریان عبوری از روی سرریز لبه پهن شبیه‌سازی شده و در نهایت به مطالعه میدان فشار بر روی سرریز پلکانی پرداخته شده است [۸]. ساندروز و همکاران در سال ۲۰۱۴ جریان عبوری بر روی سرریز درپچه‌دار و پرتابه را با استفاده از روش هیدرودینامیک ذرات هموار مورد بررسی قرار دادند. در این مقاله به مقایسه نتایج مدل عددی جریان با مدل فیزیکی پرداخته شده و الگوی جریان بر روی سرریز و پرتابه بررسی شده است [۹]. جانسون و همکاران در سال ۲۰۱۶ به بررسی پرش هیدرولیکی با استفاده از روش هیدرودینامیک ذرات هموار پرداختند. آنها در مدل ساده سازی شده، نزدیک بودن مقادیر عمق قبل و بعد از پرش را با مدل‌های آزمایشگاهی، نشان دهنده صحت شبیه‌سازی عنوان کردند و به بررسی مشخصات پرش و میدان سرعت پرداخته‌اند [۱۰].

۲. فرمولاسیون تحقیق

۱.۲. معادلات حاکم در روش FVM

شکل اولیری معادلات بقای جرم و بقای مومنتم برای جریان آشفته تراکم‌ناپذیر با لزجت و چگالی ثابت به صورت

معادلات (۱) و (۲) بیان می‌شود [۱۱].

$$\frac{\partial}{\partial x}(uA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(vA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(wA_z) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{1}{V_f} \left(U_i A_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma P'}{\partial x_i} + g_i + f_i \quad (2)$$

در معادلات فوق، متغیرهای u, v, w به ترتیب سرعت در راستای x, y و z می‌باشد. V_f نسبت حجم مایع در هر المان و مقادیر A_x, A_y, A_z مساحت جزئی از وجوه هر المان است که سیال در آن حضور دارد. ρ چگالی سیال، P' فشار، g_i نیروی گرانش در راستای i و f_i تنش رینولدز است در حالتی که از مدل‌های آشفتگی استفاده شده باشد. در المان‌هایی که از مایع پر باشند مقادیر V_f مساوی ۱ بوده و معادلات به معادلات پایه RANS برای جریان‌های تراکم ناپذیر تبدیل می‌گردد. [۱۱]

۲.۲. معادلات حاکم در روش SPH

SPH یک روش لاگرانژی ارائه شده توسط موناغان [۱۲] است که دامنه حل برای سیال را بصورت ذرات مجزای قابل حرکت در نظر می‌گیرد. هر یک از ذرات تشکیل دهنده، دارای مشخصات فیزیکی مانند جرم، چگالی، سرعت و مکان مختص به خود می‌باشد. طبیعتاً با توجه به ماهیت این روش که بر حرکت ذرات مستقل استوار است، نیازی به مش‌بندی دامنه حل نخواهد بود. ذرات تشکیل دهنده سیال در دامنه حل و بر اساس معادلات لاگرانژی ناویر استوکس جریان پیدا می‌کنند. اندرکنش ذرات در مسیر حرکت سیال، تعیین کننده ویژگی‌های سیال بوده و رفتار هیدرودینامیکی ذرات را تعیین می‌کند. با توجه به وجود ذرات مجزا که هر یک مشخصات فیزیکی مخصوص به خود را دارند، در این روش از یک تابع درونیاب برای هموارسازی مشخصات میدان جریان مانند چگالی و فشار استفاده می‌شود. در روش SPH، یک تابع دلخواه مانند $f(r)$ بصورت زیر تخمین زده می‌شود.

$$f(r) = \int f(r')W(r-r',h)dr' \quad (3)$$

در این رابطه، $W(r-r',h)$ تابع کرنل است. h و r نیز به ترتیب بیانگر طول هموارسازی و بردار مکان می‌باشند. درونیابی نیز در مرحله بعد با استفاده از رابطه زیر انجام می‌شود.

$$F(r_a) = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} F(r_b)W_{ab} \quad (4)$$

مجموع بالا بر روی تمام ذرات اطراف ذره b انجام می‌شود. $r_{ab} = r_a - r_b$ and $W_{ab} = W(r_{ab}, h)$ فاصله بین ذرات a و b است. بنابراین، توزیع بین ذرات مجاور هم، با توجه به میزان فاصله آنها از یکدیگر وزندهی می‌شود. تابع کرنل به‌عنوان تابعی از فاصله بدون بعد $(s = |r_{ab}|/h)$ بین ذره a و b بیان می‌شود. در این مقاله از تابع کرنل Wendland Quintic استفاده شده است.

$$W_{ab} = \alpha_D (1-s^2)^4 (2s+1) \quad 0 \leq s \leq 2 \quad (5)$$

که در آن α_D در حالت دوبعدی برابر است با $\frac{7}{4\pi h^2}$ و در حالت سه‌بعدی برابر با $\frac{21}{16\pi h^3}$ می‌باشد. شکل لاگرانژی معادلات بقای جرم و بقای مومنتم در روش SPH به‌صورت معادلات (۶) و (۷) می‌باشد [۱۲].

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\nabla(\rho u) + u\nabla\rho \quad (6)$$

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\nabla^2 u + f_b \quad (7)$$

در این روابط ρ, u و t به ترتیب چگالی سیال، سرعت سیال و زمان می‌باشد. P فشار، ν ضریب لزجت و f_b نیروی حجمی (مانند جاذبه‌ی زمین) را بیان می‌دارد [۱۲].

۳.۲. محاسبه خطا

برای بررسی میزان تطابق نتایج محاسبات روش‌های VOF و SPH با نتایج تحلیلی USACE، از روش‌های مربعات خطا (Mean Squared Error)، جذر میانگین مربعات خطا (Root MSE) و ضریب تبیین (Determination Coefficient) جهت بررسی خطا مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در روش میانگین مربعات خطا، از رابطه زیر برای محاسبه خطا استفاده می‌شود.

$$MSE = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (e_i)^2 \quad (8)$$

که در آن k ، تعداد کل داده‌ها می‌باشد و e حاصل تفاضل تک‌تک مقادیر محاسبه شده با مقادیر تحلیلی موجود است. روش جذر میانگین مربعات خطا نیز مطابق انتظار از رابطه زیر به محاسبه خطا می‌پردازد.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (e_i)^2} \quad (9)$$

علاوه بر دو روش فوق، روش ضریب تبیین نیز در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است. ضریب تبیین که با علامت R^2 یا DC نشان داده می‌شود، بیانگر میزان همبستگی میان دو دسته داده می‌باشد. ضریب تبیین به صورت زیر تعریف می‌شود و مقدار آن در بازه $[-1, +\infty]$ قرار دارد.

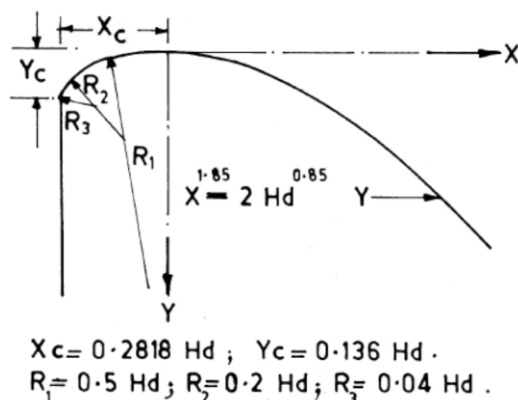
$$DC = 1 - \frac{\sum_{i=1}^k (o_i - t_i)^2}{\sum_{i=1}^k (t_i - t_i^{ave})^2} \quad (10)$$

در این رابطه، t و o به ترتیب نشان‌دهنده مقادیر محاسبه شده (VOF & SPH) و مقادیر تحلیلی موجود (USACE) می‌باشند.

۳. تحلیل نتایج

۱.۳. مقدمه

در سال ۱۹۵۰ مهندسان ارتش آمریکا مطالعات گسترده‌ای را در ارتباط با جریان بر روی سرریزها انجام داده‌اند. برای مقایسه‌ی نتایج مدل‌های عددی از نتایج مطالعات آزمایشگاهی این مطالعات در ارتباط با جریان بر روی سرریز Ogee استفاده شده است. در شکل شماره ۱ هندسه سرریز مورد بررسی توسط مهندسان ارتش آمریکا نشان داده شده است [۱۳].

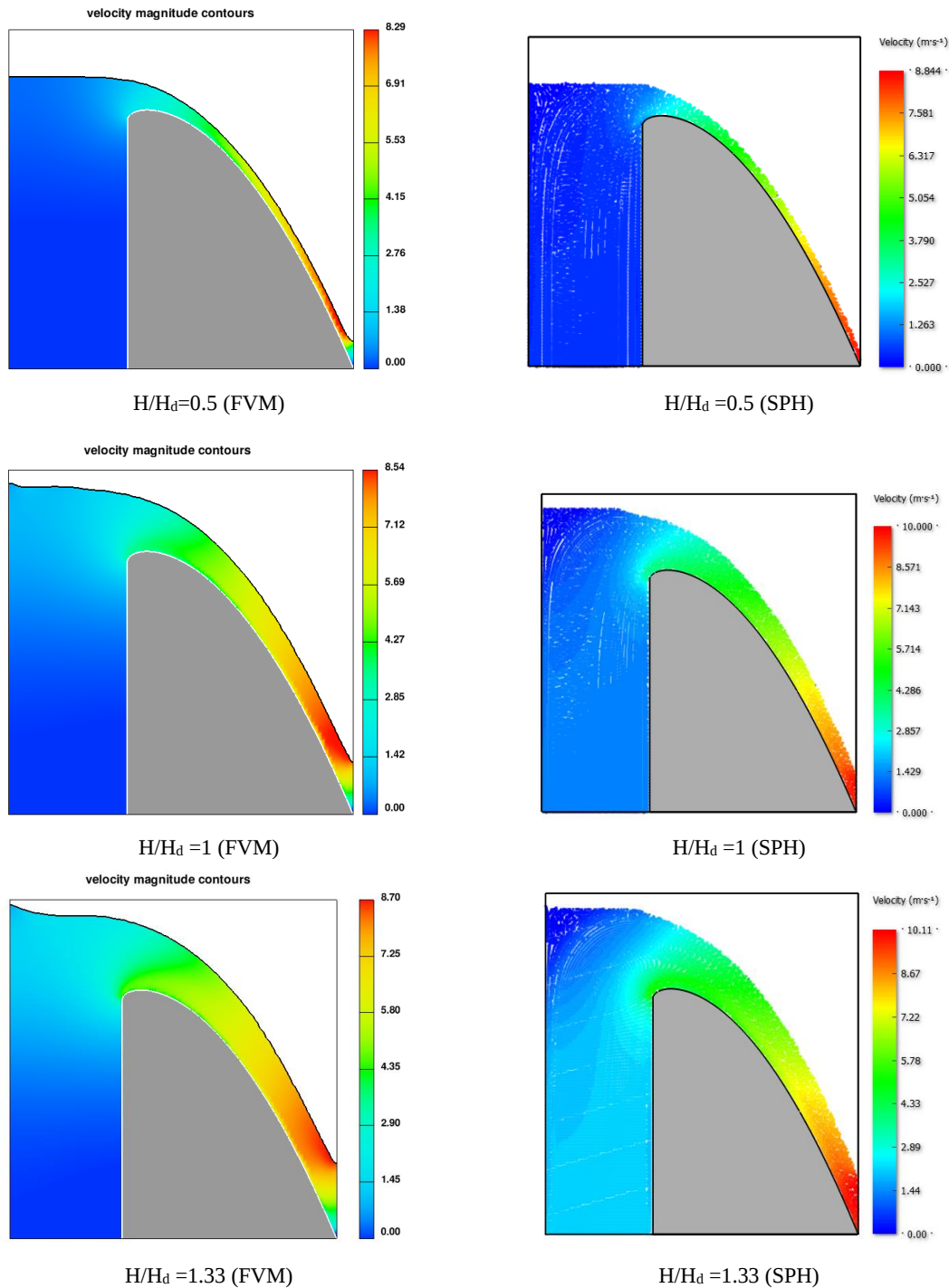


شکل ۱- سرریز اوجی و ویژگی‌های هندسی سرریز مورد بررسی توسط مهندسان ارتش آمریکا [۱۳].

در این تحقیق با توجه به نتایج آزمایشگاهی موجود، برای بار آبی طراحی ۱ متر هندسه مدل تهیه و در نسبت بارهای آبی ۰/۵، ۱ و ۱/۳۳ متر مورد بررسی قرار گرفته است. برای همسان‌سازی مدل‌سازی در دو روش FVM و SPH، تعداد حجم‌های محاسباتی در روش حجم محدود ۴۰۰ هزار و تعداد ذرات محاسباتی در روش هیدرودینامیک ذرات هموار نیز ۴۰۰ هزار بوده است.

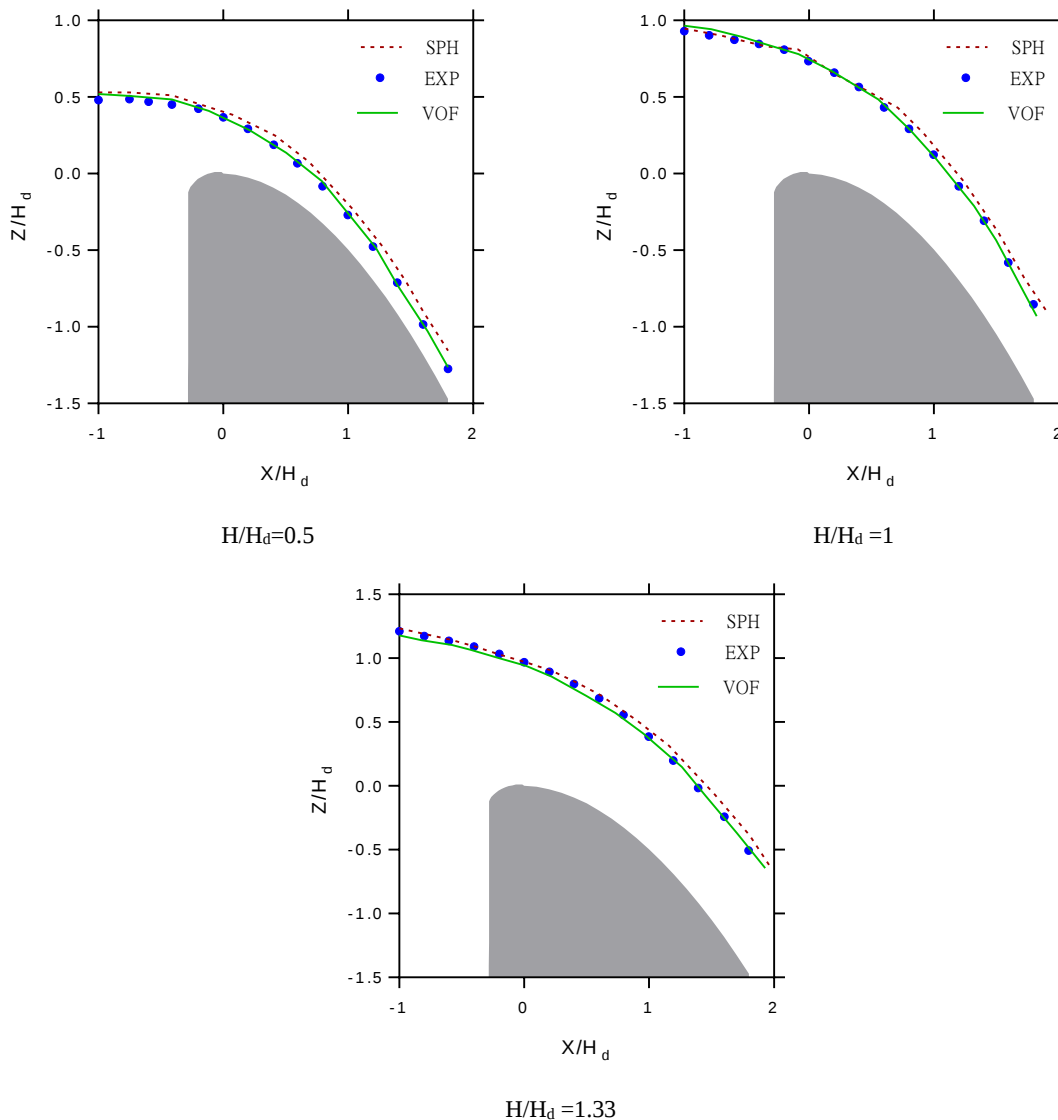
۲.۳. الگوی جریان

در شکل شماره ۲ طیف رنگی سرعت جریان شبیه‌سازی شده بوسیله روش‌های SPH و FVM نشان داده شده است.



شکل ۲- کانتورهای سرعت جریان برای بارهای آبی مختلف رو سرریز در روش‌های SPH و FVM

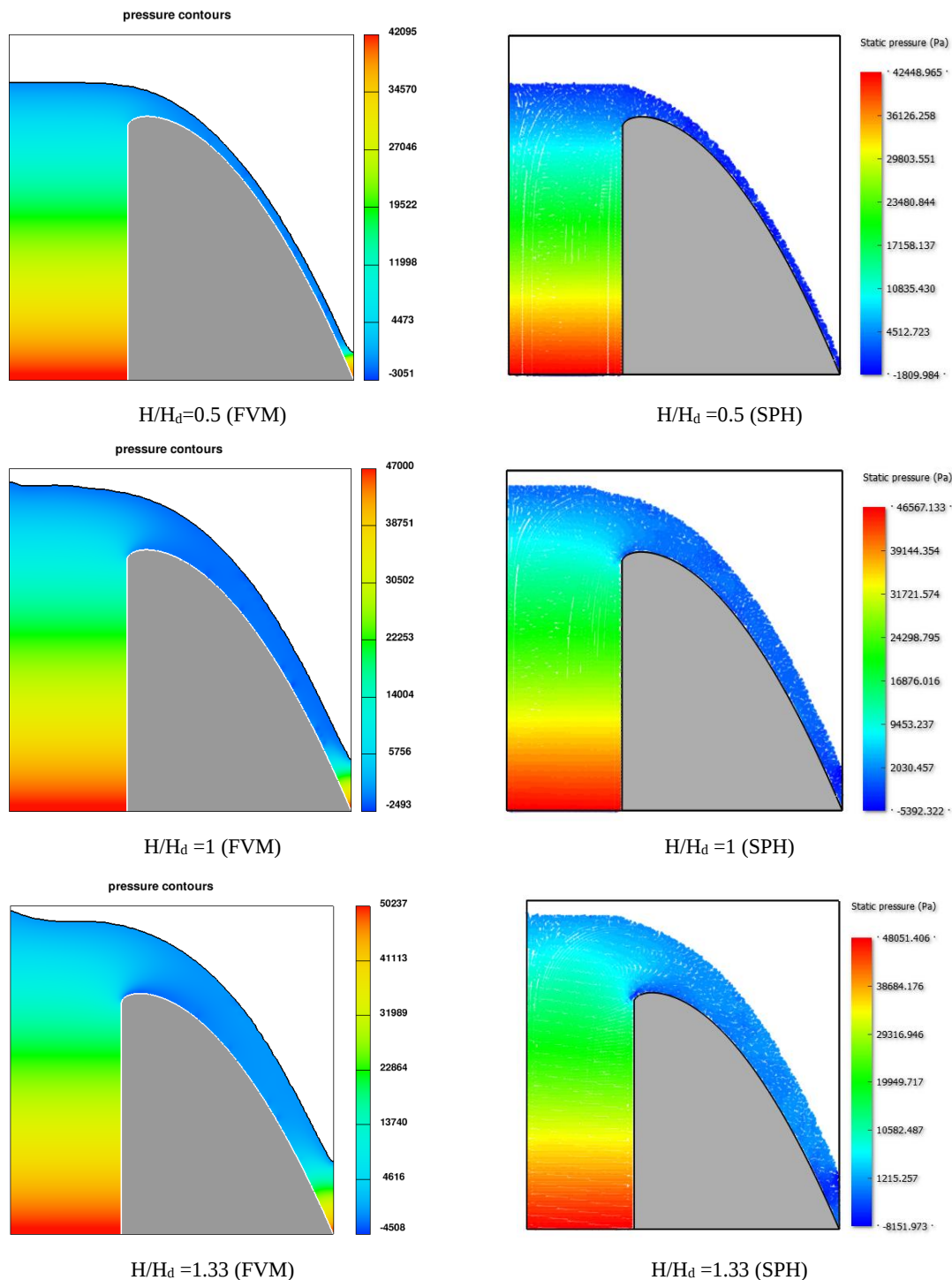
با توجه به نمودار شکل شماره ۳ پروفیل جریان در مدل در هردو روش SPH و FVM به نحوه مناسبی برآورد شده است. حداکثر خطای رخ داده در برآورد پروفیل سطح آب در هردو روش حدود ۵٪ بوده است که آن هم در هدهای پایین و در محل وقوع سرعت‌های بالا رخ داده است. دلیل این مساله این است که در هد پایین جریان دارای اغتشاشات و نوسانات بالایی می‌باشد. در برآورد سطح آزاد جریان و در نتیجه پروفیل سطح جریان، مدل FVM دارای خطای کمتری بوده است. البته اختلاف خطای روش SPH و FVM آنقدر ناچیز بوده است که قابل چشم پوشی می‌باشد.



شکل ۳- پروفیل جریان بر روی سرریز اوجی در بارهای آبی مختلف در روش‌های SPH و FVM

۳.۳. توزیع فشار

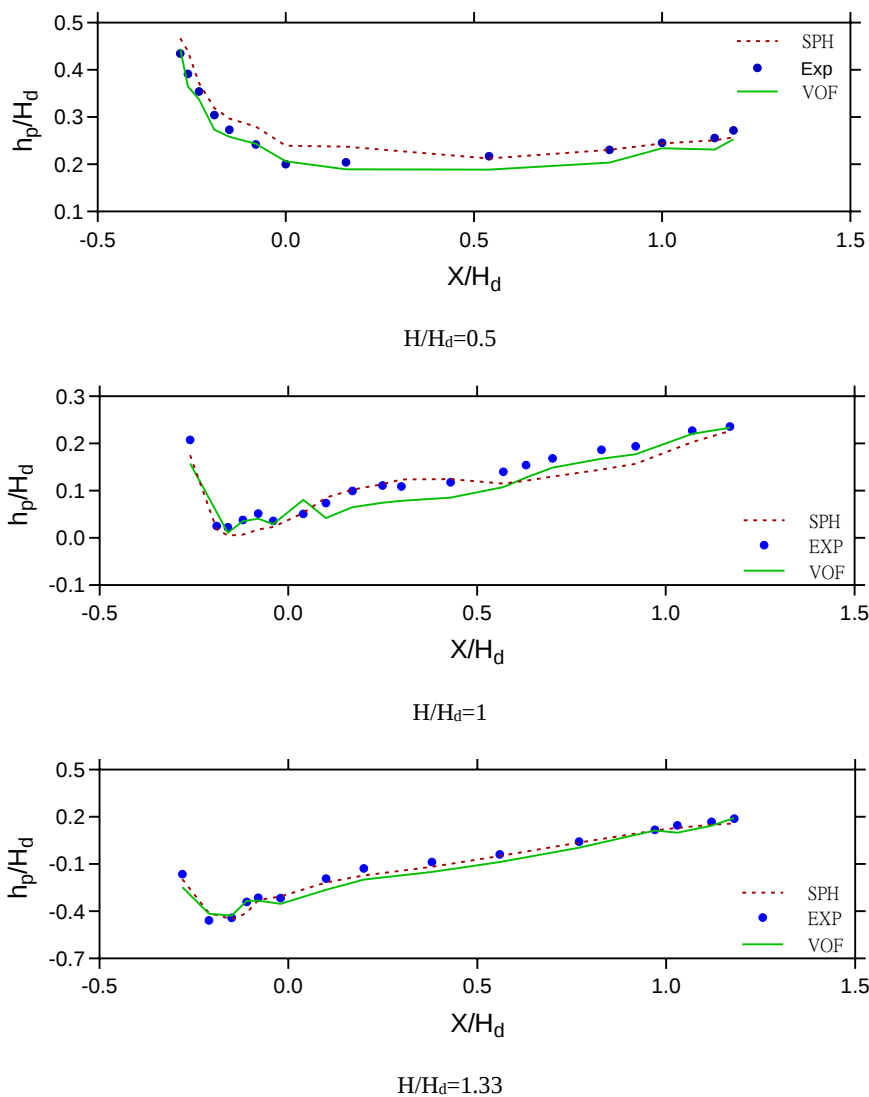
مقادیر فشار یکی از پارامترهای مهم و حساس هیدرولیکی است که در مدل‌های عددی تحت تاثیر عوامل متعددی قرار گرفته و برآورد آن همواره دارای ابهامات و خطا بوده است. در شکل شماره ۴ طیف رنگی توزیع فشار جریان برای دو روش حجم محدود و هیدرودینامیک ذرات هموار نشان داده شده است.



شکل ۴- کانتورهای فشار جریان برای بارهای آبی مختلف رو سرریز در روش‌های SPH و VOF

مقادیر فشار بر روی سرریز اوجی در مجاورت کف سازه برداشت شده است. با توجه به نمودار شکل شماره ۵ مقادیر فشار به نحوه قابل قبولی در هردو روش SPH و FVM برآورد شده است. مواردی چون مدل‌های آشفتگی، نحوه شبکه‌بندی مدل عددی، هواگیری طبیعی سیال و ... بر روی این پارامتر تاثیر گذارند. روش VOF، در عمل به صورت تک‌فازه عمل می‌کند

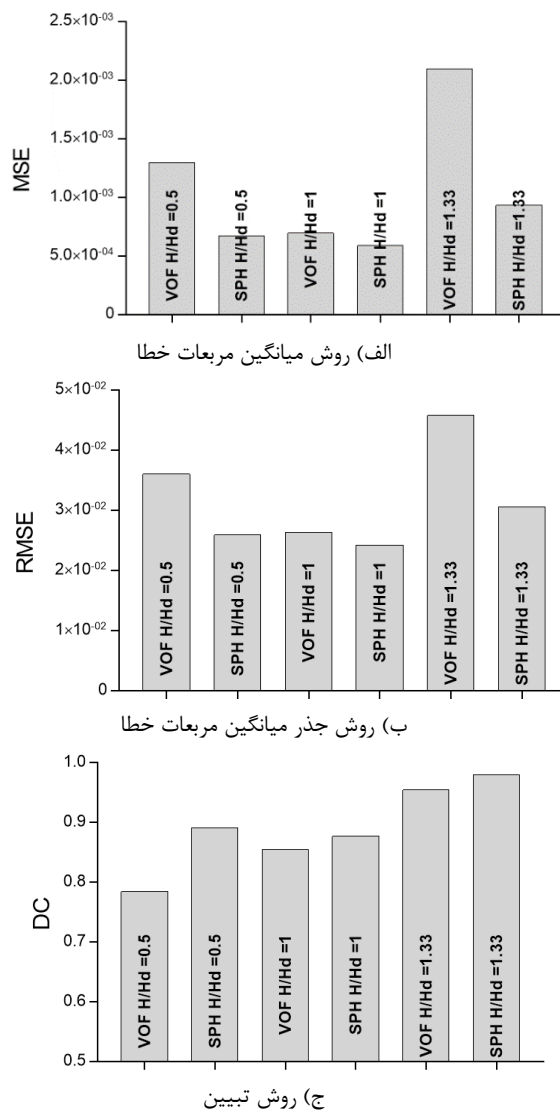
و از حالت دوفازی تنها برای محاسبه سطح آزاد سیال استفاده می‌کند. روش VOF هوا را تنها به سطوح سیال وارد می‌کند و در رساندن هوا به عمق سیال (آنچه اتفاق می‌افتد) دچار مشکل می‌شود. مدل‌سازی سطوح صلب نیز یکی از مشکلات مدل‌های بر پایه‌ی شبکه‌بندی می‌باشد. با توجه به اینکه مدل FVM یک مدل بر مبنای شبکه‌بندی می‌باشد در سطوح منحنی و هندسه‌های پیچیده دارای محدودیت‌های و تقریب‌هایی برای برآورد سطح صلب می‌باشد. مشکلات بیان شده، در روش SPH تا حد زیادی کاسته شده است. با توجه به اینکه این مدل بر مبنای شبکه نمی‌باشد پارامترهای هیدرولیکی جریان در نزدیکی سطوح پیچیده بهتر شبیه‌سازی می‌کند. البته مدل SPH در مطالعه‌ی حاضر یک مدل تک فاز بوده و این مدل نیز به مواردی چون هواگیری طبیعی جریان نمی‌پردازد. نتایج فشار در نمودار شکل شماره ۵ بر روی سطح سرریز برداشت شده است. از اینرو در مدل FVM علاوه بر افزایش میزان خطا مقادیر فشار نیز دارای وضعیت نوسانی می‌باشد. طبق نتایج نمودار شکل ۵ روش SPH نتایج توزیع فشار بر روی تاج سرریز را بهتر از مدل FVM مدل کرده است.



شکل ۵- توزیع فشار بر روی سطح سرریز در بارهای آبی مختلف در روش‌های SPH و FVM

۴.۳. محاسبه خطا در برآورد توزیع فشار

در این قسمت، نتایج برآورد خطا با استفاده از روش‌های میانگین مربعات خطا، جذر میانگین مربعات خطا و ضریب تبیین آورده شده است. در شکل شماره ۶ نتایج مربوط به سه روش بیان شده نشان داده شده است.



شکل ۶- برآورد خطای محاسباتی با استفاده از روش‌های معرفی شده

اولین نتیجه در تفسیر شکل شماره ۶، دقت بالای روش‌های VOF و SPH در محاسبه مقادیر فشار بر روی سرریز است. با توجه به معیار DC در نمودار فوق می‌توان دریافت، در تمامی هدهای مورد بررسی قرار گرفته، روش SPH دقت بالاتری نسبت به روش VOF در محاسبه میدان فشار روی سرریز نشان می‌دهد. علاوه بر این در روش SPH، با افزایش هد، دقت محاسبات افزایش یافته اما شدت این افزایش به اندازه روش VOF، نمی‌باشد. نکته مهم دیگر در نمودار فوق، همگرایی روش‌های SPH و VOF در هدهای بالاتر می‌باشد. با توجه به شکل شماره ۶، می‌توان دریافت، روش‌های SPH و VOF برای هد طراحی، کمترین خطا را با توجه به معیارهای MSE و RMSE نشان می‌دهند. نکته مهم دیگر اینکه در برآورد خطای

انجام شده با استفاده از همه معیارهای مورد بررسی، میدان فشار محاسبه شده توسط روش SPH از دقت بالاتری نسبت به روش VOF برخوردارند.

۴. نتیجه گیری

در این تحقیق به بررسی رفتار جریان بر روی سرریز اوجی بوسیله روش‌های FVM و SPH پرداخته شد. هر دو روش عددی قابلیت‌ها و ویژگی‌های منحصر به فرد خود را دارا می‌باشند و در شرایط مختلفی می‌توانند به‌عنوان گزینه مناسب برای شبیه‌سازی باشند. هر دو روش عددی در برآورد پروفیل سطح آب دارای دقت بسیار بالا بودند. پارامتر عمق جریان و سطح آب به‌عنوان یکی از اولین اطلاعات ضروری در طراحی سازه‌های هیدرولیکی می‌باشد که برآورد آن با دقت‌هایی تا ۹۰٪ می‌تواند مساله‌ای بسیار مهم باشد. با توجه به رویکرد مدل‌های عددی در حل معادلات حاکم و لزوم استفاده از برخی پیش‌فرض‌ها، مدل‌های آشفتگی و ... برآورد پارامترهای حساس فشار و سرعت بخصوص در برخی شرایط خاص همواره دارای عدم قطعیت‌های فراوانی بوده است. در این تحقیق روش FVM در برآورد فشار در برخی مکان‌ها دارای خطاهای محسوسی بوده است. همچنین این روش در برآورد پارامتر فشار بر روی سطح سرریز دچار نوسانات زیادی شده است. اما روش SPH علاوه بر پیش‌بینی صحیح الگوی توزیع فشار بر روی سطح سرریز در برآورد کلی نیز دارای خطای کمتری بوده است. در این تحقیق، جهت مقایسه نتایج روش حجم محدود و هیدرودینامیک ذرات هموار با نتایج موجود، از روش‌های میانگین مربعات خطا، جذر میانگین مربعات خطا و ضریب تبیین استفاده شده است. برای تمامی هدهای مورد بررسی و در تمامی روش‌های استفاده شده برای محاسبه خطا، برتری روش هیدرودینامیک ذرات هموار نسبت به روش حجم محدود در محاسبه فشار محسوس می‌باشد.

۵. مراجع

- [1] Cassidy, J. J. (1965). *Irrotational flow over spillways of finite height*. Journal of the Engineering Mechanics Division, 91(6), 155-176
- [2] Li, W., Xie, Q., & Chen, C. J. (1989). *Finite analytic solution of flow over spillways*. Journal of engineering mechanics, 115(12), 2635-2648
- [3] Olsen, N. R., & Kjellesvig, H. M. (1998). *Three-dimensional numerical flow modelling for estimation of spillway capacity*. Journal of Hydraulic Research, 36(5), 775-784.
- [4] Chen, Q., Dai, G., & Liu, H. (2002). *Volume of fluid model for turbulence numerical simulation of stepped spillway overflow*. Journal of Hydraulic Engineering, 128(7), 683-688.
- [5] Johnson, M. C., & Savage, B. M. (2006). *Physical and numerical comparison of flow over ogee spillway in the presence of tailwater*. Journal of Hydraulic Engineering, 132(12), 1353-1357
- [6] Gingold, R. A., & Monaghan, J. J. (1977). *Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars*. Journal of Royal astronomical society, 181, 375-389.
- [۷] ولی‌زاده، ع. و شفیع‌فر، م. و صالحی نیشابوری، ع. ا. (۱۳۹۰). ارائه یک مدل هیدرودینامیک ذرات هموار شده (SPH) استاندارد برای شبیه‌سازی جریان‌های با سطح آزاد. نشریه تحقیقات منابع آب ایران، ۷ (۳)، ۷۵-۸۴.
- [8] Sarhang, M. H. & Jowhar, R. M. & Hurshinie, U. K. & Dominic, E. R. (2013). *Investigation of pressure variations over stepped spillways using smooth particle hydrodynamics*. Journal of advances in water resources.

- [9] Saunders, K. & Prakash, M. & Cleary, P. & Cordell, M. (2014). *Application of Smoothed Particle Hydrodynamics for modelling gated spillway flows*. Journal of applied mathematical modeling 38 (17), 4308-4322.
- [10] Jansson, P. & Andreasson P. (2016). *Smoothed Particle Hydrodynamic simulation of hydraulic jump using periodic open boundaries*. Journal of applied mathematical modeling, 40 (19), 8391-8405.
- [11] Hirt, C. (1992). *Volume-fraction techniques: Powerful tools for flow modeling*. Flow Science Rep. No. FSI-92-00, 2.
- [12] Monaghan, J. J. (2005). *Smoothed particle hydrodynamics*. Reports on progress in physics, 68(8), 1703
- [13] U.S. Army Corp of Engineers (USACE). (1990). *“Hydraulic design of spillways”* EM 1110-2-1603, Dept. of the Army, Washington, D.C.